Ueber die aus einer Curve $y = f(x)$ abgeleiteten Curven $y_1 = x \frac{dy}{dx} = x f'(x)$ (Tangentencurve) und $y_2 = -x \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{f'(x)}$ (Normalcurve), mit specieller Anwendung auf die Parabel.

Inaugural-Dissertation

eingereicht

zur Erlangung der Doctorwürde

bei

der philosophischen Fakultät zu Marburg

von

Ludwig Henkel

aus Cassel.

Marburg.

Druck von Joh. Aug. Koch.

1882.

§ 1.

Gegeben sei die Gleichung einer auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Curve

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Leitet man aus derselben die Gleichungen

$$y_1 = x\frac{dy}{dx} = x\,f'(x) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und

$$y_2 = -x\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{f'(x)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

ab, so stellen dieselben zwei neue Curven dar von folgender Eigenschaft:

1) Der Leitstrahl vom Ursprung nach einem Punkte (x, y_1) der Curve (2) ist parallel der Tangente in dem entsprechenden Punkte (x, y) der ursprünglichen Curve.

2) Der Leitstrahl vom Ursprung nach dem Punkte (x, y_2) der Curve (3) ist parallel der Normale im Punkte (x, y) der ursprünglichen Curve.

Die Curve (2) soll die Tangentencurve, (3) die Normalcurve der Hauptcurve (1) genannt werden.

Um zu einem Punkte der Hauptcurve den entsprechenden Punkt der Tangentencurve resp. Normalcurve zu construieren, braucht man also nur eine Parallele zu der Tangente, resp. der Normale in dem gegebenen Punkt durch den Ursprung zu legen. Der Durchschnitt dieser Parallele mit der Ordinate des gegebenen Punkts oder deren Verlängerung ist der gesuchte Punkt. (s. Fig. 1.)

Man sieht sofort, dass die Leitstrahlen nach entsprechenden Punkten der Tangentencurve und Normalcurve auf einander senkrecht stehen.

§ 2.

1) Die Abscissen der Schnittpunkte zwischen der Hauptcurve und der Tangentencurve bestimmen sich aus der Gleichung

$$f(x) - x f'(x) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

2) Allgemein wird die Differentialgleichung

$$f(x) - x f'(x) = 0$$

nur erfüllt für $y = Cx$, d. h. für alle durch den Ursprung gehenden Geraden; es existiert also keine krumme Linie, die mit ihrer Tangentencurve zusammenfiele.

3) Die Abscissen der Schnittpunkte der Hauptcurve und Normalcurve sind gegeben durch die Gl.

$$x + f(x)\ f'(x) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

4) Die Gleichung (5) wird allgemein erfüllt für $x^2 + y^2 = 2C$; d. h. der auf seinen Mittelpunkt als Ursprung bezogene Kreis ist die einzige Curve, die mit ihrer Normalcurve zusammenfällt.

5) Die Gleichung

$$x\ (1 + [f'(x)]^2) = 0 \ldots\ldots \quad (6)$$

liefert die Abscissen der Schnittpunkte zwischen der Tangentencurve und Normalcurve.

6) Allgemein erfüllt wird (6) für keinen reellen Werth von x; es kann also nie die Tangentencurve mit der Normalcurve zusammenfallen.

§ 3.

Für den Flächeninhalt der Tangentencurve hat man den Ausdruck

$$\int_a^b y_1\, dx = b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x)\, dx \quad \ldots \quad (7)$$

oder

$$\int_a^b y\, dx + \int_a^b y_1\, dx = b f(b) - a f(a) \quad \ldots \quad (8)$$

§ 4.

Verschiebt man die Hauptcurve parallel mit sich selbst längs der Y-Axe um das Stück β, so ist ihre Gleichung jetzt

$$y = f(x) + \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Hieraus folgt als Gleichung

der Tangentencurve $y_1 = x f'(x)$

der Normalcurve $y_2 = -\frac{x}{f'(x)}$

D. h.: Die Lage und Gestalt der abgeleiteten Curven wird durch eine Verschiebung der Hauptcurve längs der Y-Axe nicht geändert; oder mit andern Worten: Die Curven (2) und (3) sind nicht blos die Tangentencurve und Normalcurve der Curve $y = f(x)$, sondern einer jeden Curve der durch (9), wenn β veränderlich gedacht wird, repräsentierten Schaar.

2) Verschiebt man die Hauptcurve parallel mit sich selbst längs der X-Axe um das Stück α, so ist die Gleichung

der Hauptcurve $y = f(x - \alpha) \quad \ldots \quad (10)$

der Tangentencurve $y_1 = x f'(x - \alpha) \quad \ldots \quad (11)$

der Normalcurve $y_2 = -\frac{x}{f'(x - \alpha)} \quad \ldots \quad (12)$

Durch eine Verschiebung der Hauptcurve längs der X-Axe wird also im Allgemeinen die Lage und Gestalt der abgeleiteten Curven geändert.

3) Durch eine Drehung der Hauptcurve wird ebenfalls die Natur der abgeleiteten Curven geändert, wie sich leicht nachweisen lässt.

§ 5.

Die Orthogonaltrajectorien der durch die Gleichung

$$y = f(x) + B \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

wo B eine willkürliche Constante bedeutet, ausgedrückten Curvenschaar, sind bestimmt durch die Differentialgleichung

$$dy = -\frac{dx}{f'(x)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

worin $f'(x)$ als eine bestimmte Function von x anzusehen ist.

Die Intregation von (14) ergiebt

$$y = -\int \frac{dx}{f'(x)} = \varphi(x) + C \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Multipliciert man in (14) auf beiden Seiten mit x, so kommt

$$xf'(x) = -x\,\frac{dx}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und

$$-\frac{x}{f'(x)} = x\,\frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Die Gleichungen (16) und (17) besagen:

Die Tangentencurve der Curvenschaar (13) ist zugleich die Normalcurve der Trajectorienschaar (15), die Normalcurve von (13) ist die Tangentencurve von (15).

Wie wir die Curven (2) und (3) die Tangentencurve und Normalcurve der Curve $y = f(x)$ genannt haben, obwohl dieselben eigentlich der ganzen Schaar $y = f(x) + B$ zugehören, so wollen wir auch die Schaar (15) nur durch diejenige Curve vertreten lassen, für welche die willkürliche Constante $C = 0$ ist.

Wir berücksichtigen also von allen Curven der Systeme (13) und (15) nur $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$. Dieselben haben nach dem Vorhergehenden die Eigenschaft, dass die Tangentencurve der einen die Normalcurve der andern ist. Wir wollen $y = \varphi(x)$ die der Curve $y = f(x)$ conjugierte Curve nennen.

Eine Verschiebung der Hauptcurve längs der X-Axe führt eine Verschiebung der conjugierten Curve um dasselbe Stück herbei; durch eine Drehung der Hauptcurve aber wird die Natur der conjugierten Curve im Allgemeinen geändert.

Die Tangentencurve und Normalcurve der Parabel.

§ 6.

Gleichung und Gestalt der Tangentencurve.

Die Gl. der auf ihre Axe als X-Axe und einen beliebigen Punkt in derselben als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems bezogenen Parabel ist:

$$y = \pm \sqrt{2p\,(x - \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wo α die Entfernung des Scheitels vom Ursprung bedeutet. Der Parameter $2p$ soll für alle unsere Untersuchungen als positiv vorausgesetzt werden.

Man erhält als Gleichung der Tangentencurve

$$y = \frac{px}{\pm \sqrt{2p\,(x - \alpha)}} \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

oder

$$y^2\,(x - \alpha) - \frac{p}{2}\,x^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2b)$$

Aus der Gleichung geht sofort hervor, dass die Curve symmetrisch zur X-Axe liegt. Für die weitere Discussion unterscheiden wir zwei Fälle:

A. α von Null verschieden.

Man findet dann:

1) y ist reell für alle Werthe von x zwischen $+\alpha$ und $+\infty$.

2) Für $x = 0$ ist $y = 0$.

3) y ist $= \infty$ für $x = \infty$ und $x = \alpha$.

Die Grade $x = \alpha$, d. h. die Scheiteltangente der Parabel ist, wie später genauer nachgewiesen werden wird, eine Asymptote der Tangentencurve.

4) Für $x < +\alpha$ ist y imaginär, ausgenommen den Fall $x = 0$, wenn α positiv ist.

5) Aus (26) erhält man durch partielle Differentiation, wenn

$$f = y^2\,(x - \alpha) - \frac{p}{2}\,x^2 = 0$$

gesetzt wird

$$\frac{df}{dx} = y^2 - px;\ \frac{df}{dy} = 2y\,(x - \alpha).$$

Für

$$x = 0,\ y = 0 \text{ ist } \frac{df}{dx} = 0,\ \frac{df}{dy} = 0;$$

der totale Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ erscheint also in diesem Falle unter unbestimmter Form. Durch nochmalige Differentiation im Zähler und Nenner findet man

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \left\{\frac{-\frac{d^2f}{dx\,dy} \pm \sqrt{\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2}}}{\frac{d^2f}{dy^2}}\right\}_{x=0}$$

$$= \left\{\frac{-2y \pm \sqrt{4y^2 + 2p\,(x-\alpha)}}{2\,(x-\alpha)}\right\}_{x=0}$$

$$= \mp\sqrt{\frac{p}{-2\alpha}}$$

$\frac{dy}{dx}$ hat also, wenn $x = 0$ ist, zwei imaginäre oder reelle Werthe, je nachdem $\alpha >$ oder < 0 ist.

Der Ursprung ist daher ein isolierter Punkt, wenn α positiv, ein Doppelpunkt, wenn α negativ ist.

6) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 - px}{2y\,(x-\alpha)} = \frac{p}{2}\,\frac{x - 2\alpha}{\pm\sqrt{2p\,(x-\alpha)^3}}$$

verschwindet für $x = 2\alpha$

Ist α positiv, so hat die Curve die Culminationspunkte

$$x = 2a;\ y = \pm\sqrt{2p\alpha}.$$

Ist α negativ, so hat y für $x = 2\alpha$ keinen reellen Werth, die Curve hat also keine Culminationspunkte

7) Der 2 Differentialquotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{4}\,\frac{x - 4\alpha}{\pm\sqrt{2p\,(x-\alpha)^5}}$$

verschwindet für $x = 4\alpha$.

Die Curve hat reelle Wendepunkte, so lange α positiv ist. Die Coordinaten derselben sind:

$$x = 4\alpha;\ y = \pm\sqrt{\frac{8}{3}\,p\alpha}$$

8) Ist α positiv, so besteht die Curve, abgesehen von dem isolierten Punkte, aus zwei getrennten Aesten, welche durch die Gleichung

$$y = \frac{px}{+\sqrt{2p(x-\alpha)}} \text{ (a) und } y = \frac{px}{-\sqrt{2p(x-\alpha)}} \text{ (b)}$$

dargestellt sind Den isolierten Punkt drücken beide Gleichungen gemeinsam aus

Die Curve ist von $x = \alpha$ bis $x = 4\alpha$ convex, von da an concav gegen die X-Axe gekrümmt.

9) Ist α negativ, so entsprechen den Gleichungen (a) und (b) zwei Aeste, welche sich im Ursprung schneiden, und eben dadurch denselben zum Doppelpunkte machen. Die Curve ist concav, wenn x positiv, convex, wenn x negativ ist.

Die Gestalt der Curve, wenn α positiv, s. Fig. 2, wenn α negativ, Fig. 3.

B. $\alpha = 0$.

Die Gleichung (2b) geht jetzt über in

$$y^2x - \frac{p}{2}x^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Dieselbe lässt sich zerlegen in die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y^2 &= \frac{p}{2}x \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Daraus folgt:

Die Tangentencurve degeneriert in diesem Falle in das System einer Parabel, welche Axe und Scheitel mit der Hauptcurve gemeinsam hat, und deren Parameter sich zu dem der letzteren wie 1 : 4 verhält, und ihrer Scheiteltangente. (s. Fig. 4.)

Es ist noch

$$y = \sqrt{\frac{p}{2}x} = \frac{1}{2}\sqrt{2px}$$

Die Tangentencurve halbiert in diesem Falle die Ordinaten der Hauptcurve.

§ 7.

Gleichung und Gestalt der Normalcurve.

Aus der Gleichung der Parabel

$$y = \pm \sqrt{2p\,(x - \alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

folgt als Gl. der Normalcurve:

$$y = \mp \frac{x}{p} \sqrt{2p\,(x - \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

oder

$$\frac{p}{2} y^2 + \alpha x^2 - x^3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2b)$$

Aus derselben folgt:

1) Die Normalcurve liegt symmetrisch zur X-Axe.

2) Für alle Werthe von x zwischen $+\alpha$ und $+\infty$ ist y stets reell und wächst mit x ins Unendliche.

3) y ist $= 0$ für $x = 0$ und $x = \alpha$.

4) Für alle Werthe von $x < +\alpha$, den Werth $x = 0$ eventuell ausgenommen, ist y imaginär.

5) Setzt man die linke Seite der Gleichung (2b) $= f$, so ist

$$\frac{df}{dx} = 2\alpha x - 3x^2; \quad \frac{df}{dy} = py$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} = 0; \quad \frac{df^2}{dx^2} = 2\alpha - 6x; \quad \frac{df^2}{dy^2} = p.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ ist $\frac{df}{dx} = 0$, $\frac{df}{dy} = 0$, und

$$\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2} = -2\alpha p.$$

Das Vorzeichen des letztern Ausdrucks ist dem von α entgegengesetzt. Es folgt daraus:

Der Ursprung ist ein isolierter Punkt, wenn α positiv, ein Rückkehrpunkt, wenn $\alpha = 0$, ein Doppelpunkt, wenn α negativ ist.

6) $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2\alpha x}{py} = \frac{3x - 2\alpha}{\sqrt{2p\,(x - \alpha)}}$$

ist $= \infty$, wenn $x = \alpha \lesseqgtr 0$ ist.

So lange also α von Null verschieden ist, schneidet die Curve die X-Axe rechtwinklig in dem Punkte $x = \alpha$, $y = 0$.

7. $\frac{dy}{dx}$ verschwindet für

$$x = \frac{2}{3}\alpha,\ y = \mp\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\frac{-2\alpha}{3p}}$$

Diese Werthe von x und y stellen im Allgemeinen die Coordinaten der Culminationspunkte dar

Dieselben haben jedoch nur dann eine geometrische Bedeutung, wenn α negativ ist. Denn falls α positiv ist, so wird in dem obigen Ausdruck y imaginär; ist $\alpha = 0$, so ist $x = 0$, $y = 0$; der Ursprung kann aber nicht im eigentlichen Sinne als Culminationspunkt angesehen werden, da die Curve sich in diesem Falle nach der negativen Seite der X hin nicht über ihn hinaus erstreckt

8) Auf analoge Weise findet man mit Hilfe des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x - 4\alpha}{\pm\sqrt{2p\,(x-\alpha)^3}}$$

dass die Curve Wendepunkte besitzt, wenn α positiv ist. Die Coordinaten derselben sind

$$x = \frac{4}{3}\alpha;\quad y = \mp\frac{4}{3}\alpha\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\alpha}{p}}$$

9) Ist α positiv, so ist die Curve concav gegen die X-Axe gekrümmt, so lange x kleiner als $\frac{4}{3}\alpha$ ist In den Wendepunkten nimmt sie convexe Krümmung an, die sie dann beibehält.

Sie hat die in Fig. 5 angegebene Gestalt.

10) Ist $\alpha = 0$, so ist die Curve eine Neil'sche Parabel. S. Fig. 6.

11) Ist α negativ, so ist die Curve concav, wenn x negativ, convex, wenn x positiv ist. Die Gestalt der Curve s. Fig. 7.

§ 8.

Die Polargleichungen der Tangentencurve und Normalcurve.

1. Durch die Substitutionen $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, erhält man als Polargleichung der Tangentencurve

$$r^3\sin^2\varphi\cos\varphi - r^2\left(\alpha\sin^2\varphi + \frac{p}{2}\cos^2\varphi\right) = 0\,. \quad (1)$$

Dieselbe lässt sich zerlegen in die Gleichungen:

$$r^2 = 0;\quad r = \frac{\frac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\varphi + \alpha}{\cos\varphi}$$

Der Pol wird also durch die Gleichung (1) stets doppelt dargestellt.

2. Als Polargleichung der Normalcurve erhält man auf dieselbe Weise

$$r^3\cos^3\varphi - r^2\left(\alpha\cos^2\varphi + \frac{p}{2}\sin^2\varphi\right) = 0\,. \quad (2)$$

Diese Gleichung lässt sich zerlegen in

$$r^2 = 0;\quad r = \frac{\frac{p}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + \alpha}{\cos\varphi}$$

drückt also ebenfalls den Pol doppelt aus.

§ 9

Die conjugierte Curve der Parabel

Die conjugierte Curve (s. § 5) der Parabel

$$y^2 = 2p\,(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist bestimmt durch die Gleichung

$$y = \int \frac{\mp\sqrt{2p\,(x-\alpha)}}{p}\,dx \quad \ldots \quad (2)$$

Da wir nach § 5 die Integrationsconstante vernachlässigen, so erhalten wir als Gleichung der conjugierten Curve

$$y = \mp\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}\,(x-\alpha)^3} \quad \ldots\ldots \quad (3a)$$

oder

$$y^2 = \frac{8}{9p}(x - \alpha)^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3b)$$

Die conjugierte Curve der auf ihre Axe als X-Axe bezogenen Parabel ist also eine Neil'sche Parabel, welche symmetrisch zur X-Axe liegt, und deren Spitze in den Scheitel der Parabel fällt Es sind speciell diejenigen Zweige der beiden parabolischen Linien conjugiert, welche auf entgegengesetzten Seiten der X-Axe liegen.

Die beiden Curven schneiden sich in den Punkten:

$$x = \frac{3}{2} p + \alpha; \; y = \pm p\sqrt{3} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Lässt man in (1) und (3) p veränderlich werden, so erhält man ein ganzes System von gemeinen und Neil'schen Parabeln. Die Schnittpunkte von je zwei conjugierten liegen auf den beiden Geraden

$$y = \pm \frac{2}{3}(x - \alpha)\sqrt{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wie man durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen (4) findet

§ 10.

Lage der Tangentencurve gegen die Parabel.

1) Eliminiert man aus den Gleichungen

$$y^2 = 2p(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$y^2 = \frac{px^2}{2(x - \alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

y, so erhält man die Gleichung

$$4(x - \alpha)^2 - x^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

deren Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte zwischen der Parabel und Tangentencurve liefern.

Die Schnittpunkte sind demnach

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\alpha, \; y = \pm\sqrt{2p\alpha} \\ x &= \frac{2}{3}\alpha, \; y = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}p\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Von diesen vier Schnittpunkten sind aber, so lange α von Null verschieden ist, stets zwei imaginär, und zwar die beiden letzteren, wenn α positiv, die beiden ersteren, wenn α negativ ist. Ist $\alpha = 0$, so fallen alle Scheitelpunkte im Ursprung zusammen.

2) Durch Vergleichung mit § 6 und § 7 findet man:

a. Ist α positiv, so schneidet die Parabel die Tangentencurve in den Culminationspunkten der letzteren.

b. Ist α negativ, so schneidet die Parabel die Tangentencurve auf der durch die Culminationspunkte der Normalcurve gezogenen Parallelen zur Y-Axe.

3) Die Abscissen der Schnittpunkte sind von p unabhängig. Es folgt daraus:

Ist ein System von Parabeln gegeben, welche Axe und Scheitel gemeinsam haben, so liegen die Schnittpunkte jeder Parabel mit ihrer Tangentencurve auf einer Parallelen zur Y-Axe.

Anmerkung: Es ist natürlich vorausgesetzt, dass die gemeinsame Axe X-Axe ist und der Parameter nicht negativ wird.

4) Die Culminations- und Wendepunkte in dem zugehörigen System von Tangentencurven liegen ebenfalls auf den Parallelen zur Y-Axe $x = 2\alpha$ und $x = 4\alpha$.

5) Eliminiert man in (4) aus je zwei zusammengehörigen Werthen von x und y die Grösse α, so erhält man die Gleichung

$$y^2 = px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$y^2 = -px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

D. h. ist ein System von Parabeln gegeben, welche eine gemeinsame Axe und gleichen Parameter haben, so sind die geometrischen Oerter der Punkte, in welchen jede Parabel von ihrer Tangentencurve geschnitten wird, die beiden Parabeln (5) und (6).

6) Die Culminationspunkte in dem zugehörigen System von Tangentencurven liegen auf der Parabel (5), die

Wendepunkte auf der Parabel

$$y^2 = \frac{2}{3} px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

§ 11.

Lage der Normalcurve gegen die Parabel.

1) Durch Elimination von y aus

$$y^2 = 2p\,(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$y^2 = \frac{2}{p} x^2\,(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

erhält man

$$(x - \alpha)\,(x^2 - p^2) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung findet man als Coordinaten der Schnittpunkte der Parabel und ihrer Normalcurve:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & x = \alpha; & y = 0 \\ \text{II} & x = +p; & y = \pm\sqrt{2p\,(p - \alpha)} \\ \text{III} & x = -p; & y = \pm\sqrt{2p\,(-p - \alpha)} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Von diesen fünf Schnittpunkten sind die in III imaginär, wenn $\alpha > -\alpha$, ausserdem auch die in II, wenn $\alpha > +p$ ist. Ist $\alpha = \pm p$, so fallen bezüglich die Punkte II oder III mit I zusammen.

2) Eliminiert man in (4) aus je zwei zusammengehörigen Werthen von x und y die Grösse p, so erhält man die Gleichungen

$$y^2 = 2x\,(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$y^2 = 2x\,(\alpha - x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hieraus folgt:

Ist ein System von Parabeln gegeben, welche Scheitel und Axe gemeinsam haben, so sind die geometrischen Oerter der Punkte, in welchen jede Parabel von ihrer Normalcurve geschnitten wird, der Scheitel und die durch (5) und (6) dargestellten Kegelschnitte.

(5) ist eine Hyperbel, (6) eine Ellipse.

Die Strecke zwischen dem Ursprung und dem Scheitel ist die reelle Axe der erstern und zugleich die kleine Axe der Ellipse.

Die Nebenaxe der Hyperbel (5), zugleich die grosse Axe von (6), hat die Grösse $x\sqrt{2}$.

Ist $\alpha = 0$, so degeneriert (6) in den Ursprung, (5) in die beiden Geraden $y = \pm x\sqrt{2}$.

3) Die Culminations- und Wendepunkte des zugehörigen Systems von Normalcurven liegen auf Parallelen zur Y-Axe.

4) Ist ein System von Parabeln gegeben, welche die X-Axe zur gemeinsamen Axe und einen gleichen Parameter haben, so sind die geometrischen Oerter der Schnittpunkte einer jeden Parabel mit ihrer Normalcurve die X-Axe und die beiden Parallelen zur Y-Axe

$$x = \pm p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

5) Der geometrische Ort der Culminationspunkte in dem zugehörigen System von Normalcurven ist bestimmt durch die Gleichung

$$y^2 = -\frac{x^3}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

der der Wendepunkte durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{2p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Beide geometrische Oerter sind Neil'sche Parabeln, deren Rückkehrpunkt im Ursprung liegt.

§ 12.

Lage der Tangentencurve und Normalcurve gegen einander.

1) Die Gleichung

$$\frac{p\,x^2}{2\,(x-\alpha)} = \frac{2}{p}\,x^2\,(x-\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (1a)$$

oder

$$x^2\,[p^2 - 4\,(x-\alpha)^2] = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1b)$$

hat die Wurzeln

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = 0 \qquad x_3 = \alpha + \frac{p}{2}$$
$$x_4 = \alpha - \frac{p}{2}$$

Hieraus folgen als Coordinaten der Punkte, welche die Tangentencurve mit der Normalcurve gemeinsam hat:

$$x = 0;\ y = 0;\ \text{und}\ x = \alpha + \frac{p}{2};\ y = \pm\left(\alpha + \frac{p}{2}\right). \quad (2)$$

Die Wurzel x_4 liefert keine reellen Schnittpunkte.

Die beiden Schnittpunkte

$$x = \alpha + \frac{p}{2};\ y = \pm\left(\alpha + \frac{p}{2}\right)$$

liegen auf der Parallelen zur Y-Axe, welche durch den Brennpunkt der Parabel geht.

2) Die geometrischen Oerter der Schnittpunkte, wenn p oder α variabel wird, sind die beiden durch den Ursprung gezogenen Geraden, welche einen Winkel von 45^0 mit der X-Axe einschliessen.

§ 13.

Secante der Tangentencurve.

Die Tangentencurve ist eine Linie dritten Grades und wird daher von einer Geraden im Allgemeinen in drei Punkten geschnitten. Die Abscissen der Schnittpunkte sind bestimmt durch die Wurzeln der Gleichungen

$$m^2 x^3 + (2mn - \frac{p}{2} - m^2\alpha)\, x^2 + (n^2 - 2mn\alpha)\, x - n^2\alpha = 0 \quad (1)$$

welche durch Elimination von y aus den Gleichungen

$$y = \frac{p\, x}{\sqrt{2p\ (x - \alpha)}}$$

und

$$y = m\, x + n$$

hervorgeht.

Es sollen einige Specialfälle betrachtet werden.

1) Ist $n = 0$, so sind die Wurzeln von (1)

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = 0 \qquad x_3 = \frac{p}{2m^2} + \alpha.$$

Eine Gerade, die durch den Ursprung geht, schneidet demnach die Curve ausserdem nur in einem Punkte.

2) Ist $m = 0$, d. h. lauft die Gerade parallel zur X-Axe, so liegt ein Schnittpunkt im Unendlichen Die Coordinaten der beiden andern sind:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{n}{p}\left(n \pm \sqrt{n^2 - 2p\alpha}\right); \quad y = n.$$

Diese Schnittpunkte fallen in einen Berührungspunkt zusammen, wenn $n^2 = 2p\alpha$ ist, sie werden imaginär, wenn $n^2 < 2p\alpha$ ist.

3. Ist $m = \infty$, d. h. ist die Gerade parallel zur Y-Axe, so schneidet sie, falls sie rechts von der Asymptote liegt, die Curve in zwei Punkten. Der dritte Schnittpunkt liegt im Unendlichen.

§ 14.

Tangente der Tangentencurve.

Die Gleichung der Tangente am Punkte (x, y) der Tangentencurve ist:

$$\eta - y = \frac{p}{2}\,\frac{\alpha - 2\alpha}{\sqrt{2p\,(x-\alpha)^3}}\,(\xi - x) \ldots . \quad (1a)$$

oder

$$\eta = \frac{p}{2}\,\frac{(x - 2\alpha)\,\xi + x^2}{\sqrt{2p\,(x-\alpha)^3}} \ldots . \quad (1b)$$

1. Für $x = \alpha$, $y = \infty$ folgt aus (1) $\xi = \alpha$. D. h. die Scheiteltangente der Hauptcurve ist eine Asymptote der Tangentencurve. (cf. § 6, A. 3.)

2. Für $x = 0$, $y = 0$ geht (1) über in

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{p}{-2\alpha}}\,\xi = \frac{p}{\pm\sqrt{-2p\alpha}}\,\xi$$

Die Tangente im Ursprung, wenn eine solche existiert, ist parallel der Tangente im entsprechenden Punkte der Hauptcurve. Es liesse sich dies auch direct daraus folgern, dass für $x = 0$, $y = 0$ die Tangente mit dem Radius vector zusammenfällt.

3. Der Winkel, unter welchen sich die Tangenten im Ursprung schneiden, ist bestimmt durch die Gleichung

$$w = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{p}{-2\alpha}}$$

w ist $= 90^0$, wenn $\alpha = -\frac{p}{2}$ ist, d. h., wenn der Brennpunkt der Hauptcurve im Ursprung liegt.

Ist $\alpha = 0$, so ist $w = 180^0$; d. h. die beiden Tangenten decken sich. (cf. § 6, B.)

4) Die Tangente schneidet die Curve in einem Punkte, welcher der Tangentialpunkt heisst

Setzt man in (1) statt η:

$$\frac{p\,\xi}{\sqrt{2p\,(\xi - \alpha)}}$$

so erhält man die Gleichung

$$(x - 2\alpha)^2\,\xi^3 + [2\,(x - 2\alpha)\,x^2 + \alpha\,(x - 2\alpha)^2 - 4\,(x - \alpha)^3]\,\xi^2 + [x^4 - 2x^2\alpha\,(x - 2\alpha)]\,\xi - \alpha x^4 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

die nach ξ vom 3. Grade ist.

Die Wurzeln sind

$$\left.\begin{matrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{matrix}\right\} = x; \qquad \xi_3 = \frac{\alpha x^2}{(x - 2\alpha)^2} \quad \ldots \quad (3)$$

ξ_3 ist die Abscisse des Tangentialpunkts.

Die zugehörige Ordinate ist

$$\eta = \frac{\frac{p}{2}\,x^2}{(x - 2\alpha)\sqrt{2p\,(x - \alpha)}}$$

5) Ist α positiv, so liegt der Tangentialpunkt auf dem entgegengesetzten Aste, wie der Berührungspunkt, wenn $x < 2\alpha$, auf demselben Aste, wenn $x > 2\alpha$ ist.

Ist $x = 2\alpha$, d. h. ist der Berührungspunkt einer der Culminationspunkte, so liegt der Tangentialpunkt im Unendlichen.

6) Ist α negativ, so liegt der Tangentialpunkt stets auf dem entgegengesetzten Ast wie der Berührungspunkt. Für die Tangenten in dem Doppelpunkt fällt der Tangentialpunkt mit dem Berührungspunkt zusammen.

7) Ist $\alpha = 0$, so liegt der Tangentialpunkt stets auf der, jetzt einen Theil der Curve bildenden, Y-Axe.

8) Die absolute Länge der Subtangente ist

$$\frac{2x\ (x - \alpha)}{x - 2\alpha}$$

Aus der Unabhängigkeit dieses Ausdrucks von p folgt:

Ist ein System von Curven gegeben, das dargestellt ist durch die Gleichung

$$y = \frac{px}{\pm\sqrt{2p\ (x - \alpha)}}$$

worin p eine Variable bedeutet, so gehen die Tangenten sämmtlicher Punkte, welche gleiche Abcisse haben, durch einen festen Punkt auf der X-Axe.

9) Die Gleichung (1) ist nach x vom 4. Grade. Es folgt daraus, dass sich von einem Punkte (ξ, η) im Allgemeinen vier Tangenten an die Curve ziehen lassen, oder dass dieselbe von der vierten Klasse ist.

§ 15.

Durchmesser der Tangentencurve.

Die Tangentencurve werde von einer Schaar paralleler Geraden

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + N \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

geschnitten. Auf einer jeden solchen Geraden sei das Centrum der mittleren Entfernung bestimmt, d. h. der Punkt, welcher so liegt, dass die algebraische Summe seiner Abstände von den Schnittpunkten der Transversale und der Curve $= 0$ ist.

Der geometrische Ort aller dieser Centren der mittleren Entfernung ist der der Richtung der Transversalenschaar conjugierte Durchmesser erster Ordnung der Tangentencurve.

Der geometrische Ort der Punkte, für welche die algebraische Summe der Produkte aus je zwei Abständen von den Schnittpunkten verschwindet, ist der Durchmesser zweiter Ordnung oder der Diametralkegelschnitt der Curve.

Um die Gleichungen der Durchmesser für die Tangentencurve zu finden, setzt man in die Gleichung der letzteren

$$x = \xi + \varrho \cos \varphi: y = \eta + \varrho \sin \varphi.$$

Man erhält dann

$$\varrho^3 \sin^2\varphi \cos\varphi + \varrho^2 [(\xi - \alpha) \sin^2\varphi - \frac{p}{2} \cos^2\varphi + 2\eta \sin\varphi \cos\varphi] +$$

$$+ \varrho [\eta^2 \cos\varphi + 2\eta (\xi - \alpha) \sin\varphi - p\,\xi \cos\varphi] + \eta^2 (\xi - \alpha) -$$

$$- \frac{p}{2} \xi^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Löst man diese Gleichung nach ϱ auf so liefern ihre Wurzeln die Werthe für die Abstände eines Punktes (ξ, η) von den Schnittpunkten einer durch ihn gezogenen Geraden, deren Neigungswinkel φ ist, und der Curve.

Soll daher der Punkt (ξ, η) einem der Durchmesser angehören, so muss bezüglich das zweite oder dritte Glied der Gleichung (2) verschwinden.

Betrachtet man demnach ξ und η als laufende Coordinaten, so hat man als Gleichung

des Durchmessers 1. Ordnung:

$$(\xi - \alpha) \sin^2\varphi - \frac{p}{2} \cos^2\varphi + 2\eta \sin\varphi \cos\varphi = 0$$

oder

$$\eta = \frac{\frac{p}{2} \operatorname{ctg}\varphi + \alpha \operatorname{tg}\varphi - \xi \operatorname{tg}\varphi}{2} \quad \ldots \quad (3)$$

des Durchmessers 2. Ordnung:

$$\eta^2 \cos\varphi + 2\eta\,(\xi - \alpha)\sin\varphi - p\,\xi\cos\varphi = 0$$

oder

$$\eta^2 + 2\eta\,(\xi - \alpha)\operatorname{tg}\varphi - p\,\xi = 0 \quad . . \quad (4)$$

I. Der Durchmesser 1. Ordnung.

1) Diejenige Gerade der Schaar (1), welche durch den Ursprung geht, schneidet die Curve ausserdem in einem Punkte M. Sind dessen Coordinaten ξ_0, η_0, so ist

$$\xi_0 = \frac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\varphi + \alpha; \quad \eta_0 = \frac{p}{2}\operatorname{ctg}\varphi + \alpha\operatorname{tg}\varphi.$$

Man kann demnach die Gleichung des Durchmessers einfacher schreiben:

$$\eta = \frac{\eta_0 - \xi\operatorname{tg}\varphi}{2} \quad . . . . . \quad (3a)$$

2) Die Stücke, welche der Durchmesser auf den Coordinatenaxen abschneidet, sind

$$\xi = \xi_0; \quad \eta = \frac{\eta_0}{2}$$

Der Durchmesser geht also durch den Fusspunkt der Ordinate von M und schneidet die Y-Axe in der halben Höhe dieser Ordinate.

3) Ist $\varphi = 0$, so liegt der Durchmesser im Unendlichen; ist $\varphi = 90^0$, so fällt er mit der Asymptote zusammen.

4) Die Tangentencurve hat zwei Durchmesser 1. Ordnung, welche ihre Sehnen unter rechten Winkeln schneiden. Die Gleichung dieser Durchmesser ist

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\xi + \alpha + \frac{p}{4}\right)}$$

II. Der Diametralkegelschnitt.

1) Der Diametralkegelschnitt ist im Allgemeinen eine Hyperbel.

2) Die Coordinaten des Mittelpunkts sind

$$X = -\frac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\varphi + \alpha; \quad Y = \frac{p}{2}\operatorname{ctg}\varphi \quad . . \quad (5)$$

3) Eliminiert man aus den Gleichungen ctg φ, so erhält man die Gleichung

$$Y^2 = -\frac{p}{2}(X - \alpha) \ldots\ldots (6)$$

D. h. construiert man zu allen möglichen Sehnenrichtungen die Diametralkegelschnitte, so liegen die Mittelpunkte derselben auf der durch (6) dargestellten Parabel.

4) Ist $\varphi = 0$, so liegt der Mittelpunkt in unendlicher Entfernung und der Diametralkegelschnitt geht in die Parabel $\eta^2 = p\,\xi$ über. Für $\varphi = 90^0$ degeneriert er in das System der X-Axe und der Asymptote.

5) Differentiiert man die Gleichung

$$F = \eta^2 \cos\varphi + 2\eta\,(\xi - \alpha)\sin\varphi - p\,\xi\cos\varphi = 0$$

partiel nach φ, so erhält man

$$\frac{dF}{d\varphi} = 2\eta\,(\xi - \alpha)\cos\varphi - (\eta^2 - p\,\xi)\sin\varphi$$

Setzt man diesen Ausdruck $= 0$, so folgt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\eta\,(\xi - \alpha)}{\eta^2 - p\,\xi}$$

und wenn man diesen Werth in (4) einsetzt

$$(\eta^2 - p\,\xi)^2 + 4\eta^2\,(\xi - \alpha)^2 = 0 \ldots (7)$$

Denkt man sich also zu allen Sehnenrichtungen die Diametralkegelschnitte construiert, so werden diese von der durch (7) dargestellten Curve eingehüllt.

§ 16.

Secante der Normalcurve.

Die Normalcurve ist vom 3. Grade und wird daher von einer Geraden im Allgemeinen in drei Punkten geschnitten.

Ist die Gleichung der Geraden $y = mx + n$, so ergeben sich die Abscissen der Schnittpunkte aus der Gleichung

$$x^3 - \left(\frac{p}{2}m^2 + a\right)x^2 - mnpx - \frac{p}{2}n^2 = 0 \ldots (1)$$

1) Ist $n = 0$, d. h. geht die Gerade durch den Ursprung, so sind die Wurzeln von (1)

$$x_1 = x_2 = 0; \quad x_3 = \frac{p}{2} m^2 + \alpha.$$

2) Ist die Gerade parallel zur X-Axe, also $m = 0$, so geht (1) über in

$$x^3 - \alpha x^2 - \frac{p}{2} n^2 = 0$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist

$$\frac{n^2 p}{16.27^2} (p n^2 + 8\alpha^3);$$

Daraus folgt:

Die Gerade hat drei reelle Schnittpunkte mit der Curve, wenn α negativ und n^2 numerisch $< \frac{8\alpha^3}{p}$ ist. Im letzteren Falle rücken zwei Schnittpunkte zu einem Berührungspunkt zusammen.

Ist n^2 grösser, oder ist $\alpha > 0$, so existiert nur ein reeller Schnittpunkt.

3) Eine Parallele zur Y-Axe schneidet die Curve im Endlichen höchstens in zwei Punkten.

§ 17.

Tangente der Normalcurve.

Die Gleichung der Tangente am Punkte (x, y) der Normalcurve ist

$$\eta - y = \frac{3x - 2\alpha}{\sqrt{2p\,(x - \alpha)}} (\xi - x) \quad \ldots \quad (1a)$$

oder

$$\eta = \frac{(3x - 2\alpha)\,\xi - x^2}{\sqrt{2p\,(x - \alpha)}} \quad \ldots \quad (1b)$$

1) Ist $x = 0$, $y = 0$, so ist

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{-2p\alpha}}{p} \xi.$$

Die Tangenten im Ursprung sind parallel den Normalen in den entsprechenden Punkten der Hauptcurve. (cf. § 14, 2.)

2) Der Winkel, welchen die Tangenten in dem Doppelpunkt bilden, ist

$$w = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{-2\alpha}{p}}$$

w ist auch hier $= 90^0$, wenn $\alpha = -\frac{p}{2}$ ist. (cf. § 14, 3.)

3. Setzt man in (1) für η den Werth

$$\xi \sqrt{\frac{2}{p}(\xi - \alpha)},$$

so erhält man die Gleichung

$$4(x-\alpha)\xi^3 + (8\alpha x - 9x^2)\xi^2 + 2x^2(3x - 2\alpha)\xi - x^4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Löst man (2) nach ξ auf, so ergeben sich die Wurzeln

$$\left.\begin{matrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{matrix}\right\} = x; \qquad \xi_3 = \frac{x^2}{4(x-\alpha)}$$

ξ_3 ist die Abscisse des Tangentialpunkts. Die zugehörige Ordinate ist

$$\eta = -\frac{x^2(x-2\alpha)}{4\sqrt{2p}(x-\alpha)^3}$$

4) Die absolute Länge der Subtangente ist

$$\frac{2x(x-\alpha)}{3x-2\alpha}$$

Dieser Ausdruck ist von p unabhängig. Ist daher p variabel, so haben alle Punkte der Curvenschaar

$$y^2 = \frac{2}{p}x^2(x-\alpha),$$

welche gleiche Abscisse haben, auch gleiche Subtangente; oder: Die Tangenten an Punkte von gleicher Abscisse gehen durch einen festen Punkt auf der X-Axe.

5) Die Gleichung (1b) ist nach x vom vierten Grad; es folgt daraus, dass die Curve von der vierten Klasse ist.

§ 18

Durchmesser der Normalcurve.

Setzt man in die Gleichung der Normalcurve

$$x = \xi + \varrho \cos \varphi;\ y = \eta + \varrho \sin \varphi,$$

so geht dieselbe über in

$$\varrho^3 \cos {}^3\varphi + \varrho^2 \left[(3\xi - \alpha) \cos {}^2\varphi - \frac{p}{2} \sin {}^2\varphi \right] +$$
$$+ \varrho \left[(3\xi^2 - 2\alpha\xi) \cos \varphi - p\eta \sin \varphi \right] +$$
$$+ \xi^2 (\xi - \alpha) - \frac{p}{2} \eta^2 = 0 \ldots\ldots (1)$$

Durch dieselben Schlüsse wie in § 15 erhält man hieraus für die Normalcurve als Gleichung

des Durchmessers 1. Ordnung:

$$(3\xi - \alpha) \cos {}^2\varphi - \frac{p}{2} \sin {}^2\varphi = 0$$

oder

$$\xi = \frac{\frac{p}{2} \operatorname{ctg} {}^2\varphi + \alpha}{3} \ldots\ldots (2)$$

des Diametralkegelschnitts:

$$\xi (3\xi - 2\alpha) \cos \varphi - p\eta \sin \varphi = 0 \ldots (3)$$

Der Durchmesser 1. Ordnung ist stets eine Parallele zur Y-Axe.

Für $\varphi = 90^0$ fällt dieselbe ins Unendliche.

Der Diametralkegelschnitt ist eine Parabel, deren Axe parallel zur Y-Axe ist. Der Parameter ist $\frac{p}{3} \operatorname{tg} \varphi$; die Coordinaten des Scheitels sind

$$\xi = \frac{\alpha}{3};\quad \eta = -\frac{\alpha^2}{3p} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Construiert man zu allen Sehnenrichtungen die Diametralkegelschnitte, so liegen die Scheitel derselben auf der Geraden $\xi = \frac{\alpha}{3}$.

Für $\varphi = 0$ degeneriert der Diametralkegelschnitt in die beiden parallelen Geraden $\xi = 0$ und $\xi = \frac{2}{3}\alpha$; für $\varphi = 90^0$ in die X-Axe.

§ 19.

Quadratur der Tangentencurve und Normalcurve.

Der § 3 liefert uns für den Flächeninhalt der Tangentencurve die Formel

$$F = \int_a^b y\,dx = b\sqrt{2p(b-\alpha)} - a\sqrt{2p(a-\alpha)} - \int_a^b \sqrt{2p(x-\alpha)}\,dx$$

$$= b\sqrt{2p(b-\alpha)} - a\sqrt{2p(a-\alpha)} - \frac{2}{3}\sqrt{2p}\left\{(b-\alpha)^{\frac{3}{2}} - \right.$$

$$\left. - (a-\alpha)^{\frac{3}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{b}{3}\sqrt{2p(b-\alpha)} - \frac{a}{3}\sqrt{2p(a-\alpha)} + \frac{2}{3}\alpha\sqrt{2p}\left\{\sqrt{b-\alpha} - \sqrt{a-\alpha}\right\}$$

Setzt man unter der Voraussetzung, dass α negativ ist, $a = \alpha$, $b = 0$, so ist

$$F = \frac{2}{3}\,\alpha\,\sqrt{-2p\alpha}$$

d. h. die Fläche zwischen der Tangentencurve und der Asymptote ist gleich dem Segment, welches die Y-Axe von der Parabel abschneidet.

Für den Flächeninhalt der Normalcurve erhält man

$$F' = \int_a^b \frac{x}{p} \sqrt{2p\,(x-\alpha)}\; dx =$$

$$= \frac{2}{15p}\sqrt{2p\,(b-\alpha)^3}\,(3b+2\alpha) - \frac{2}{15p}\sqrt{2p\,(a-\alpha)^3}\,(3a+2\alpha)$$

§ 20.

Aenderung der abgeleiteten Curven, wenn die Hauptcurve um ihren Scheitel gedreht wird.

Dreht man die Parabel $y^2 = 2p\,(x-\alpha)$, um ihren Scheitel, sodass also ihre Axe mit der X-Axe jetzt den Winkel φ bildet, so ist ihre Gleichung

$$\left[y\cos\varphi - (x-\alpha)\sin\varphi\right]^2 = 2p\left[(x-\alpha)\cos\varphi + y\sin\varphi\right]$$

oder

$$y = \frac{\left[(x-\alpha)\cos\varphi + p\right]\sin\varphi \pm \sqrt{2p\,(x-\alpha)\cos\varphi + p^2\sin^2\varphi}}{\cos^2\varphi} \quad (1)$$

Hieraus folgt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sin\varphi + \frac{p}{\pm\sqrt{2p\,(x-\alpha) + p^2\sin^2\varphi}} \quad \cdots \quad (2)$$

und somit als Gleichung

der Tangentencurve:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{p\,x}{\pm\sqrt{2p\,(x-\alpha)\cos\varphi + p^2\sin^2\varphi}} \quad \cdots \quad (3)$$

der Normalcurve:

$$y = \frac{\mp\, x\cos\varphi\sqrt{2p\,(x-\alpha)\cos\varphi + p^2\sin^2\varphi}}{p \pm \sin\varphi\sqrt{2p\,(x-\alpha)\cos\varphi + p^2\sin^2\varphi}} \quad \cdots \quad (4)$$

Es mögen noch einige Specialfälle betrachtet werden.

I. Ist

$$\alpha = \frac{p}{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi,$$

so degeneriert die Tangentencurve in die Y-Axe und eine Parabel, welche diese berührt

II. Ist $\varphi = 90^0$, so liefert (2) die Werthe

$$y'_1 = \infty; \quad y'_2 = \frac{0}{0}$$

welch letzterer, indem man im Zähler und Nenner nach φ differentiiert in $\frac{x - \alpha}{p}$ übergeht.

Die Tangentencurve ist somit jetzt dargestellt durch die Gleichungen

$$y = \infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

$$y = \frac{x\,(x - \alpha)}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

die Normalcurve durch die Gleichungen

$$y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(m)}$$

$$y = \frac{-\,px}{x - \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(n)}$$

Die Tangentencurve besteht aus der unendlich fernen Parallelen zur X-Axe und einer Parabel, deren Axe parallel zur Y-Axe ist. Der Parameter der letzteren ist halb so gross als der der Hauptcurve, also von α unabhängig. Die Coordinaten des Scheitels sind

$$x = \frac{\alpha}{2}; \quad y = -\frac{\alpha^2}{4p}$$

Durch Elimination von α folgt hieraus

$$y = -\frac{x^2}{p}$$

Wird also die Hauptcurve längs der X-Axe parallel mit sich selbst verschoben, so bewegt sich der Scheitel der Parabel (b) auf einer Parabel, deren Parameter dem ihrigen

entgegengesetzt gleich ist, und welche die Y-Axe zur Axe hat.

Die Normalcurve besteht aus der X-Axe und einer gleichseitigen Hyperbel, welche die Geraden $x = \alpha$; $y = -p$, zu Asymptoten hat. Für $\alpha = 0$ degeneriert die Hyperbel in die beiden Geraden $x = 0$, $y = -p$.

Conjugierte Curve der Parabel ist in unserem Falle jede der beiden logarithmischen Linien

$$y = -p\, l\, (x - \alpha)$$

und

$$y = -p\, l\, (\alpha - x)$$

Berichtigung:

Seite 14, Zeile 4 von oben ist „Schnittpunkte“ nicht „Scheitelpunkte“ zu lesen.

Fig.1.

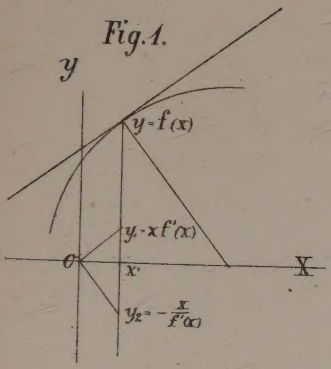

Fig.2.

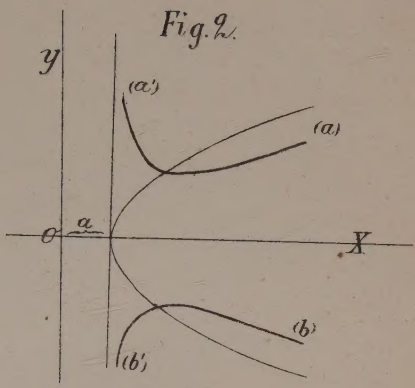

Fig.3.

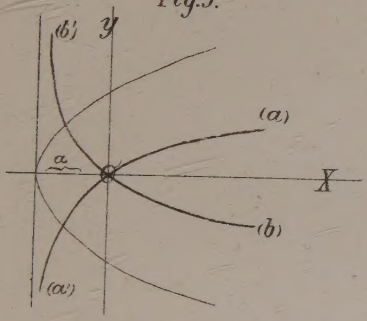

Fig.4.

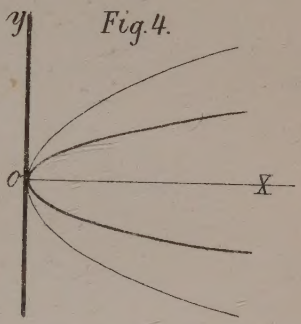

Fig.5

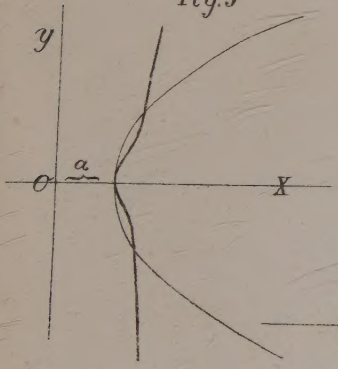

Fig.6.

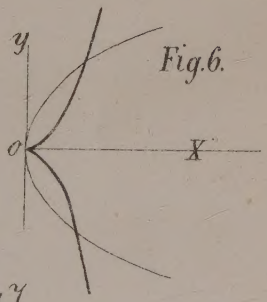
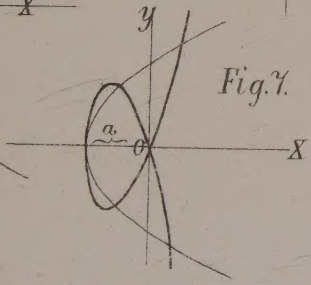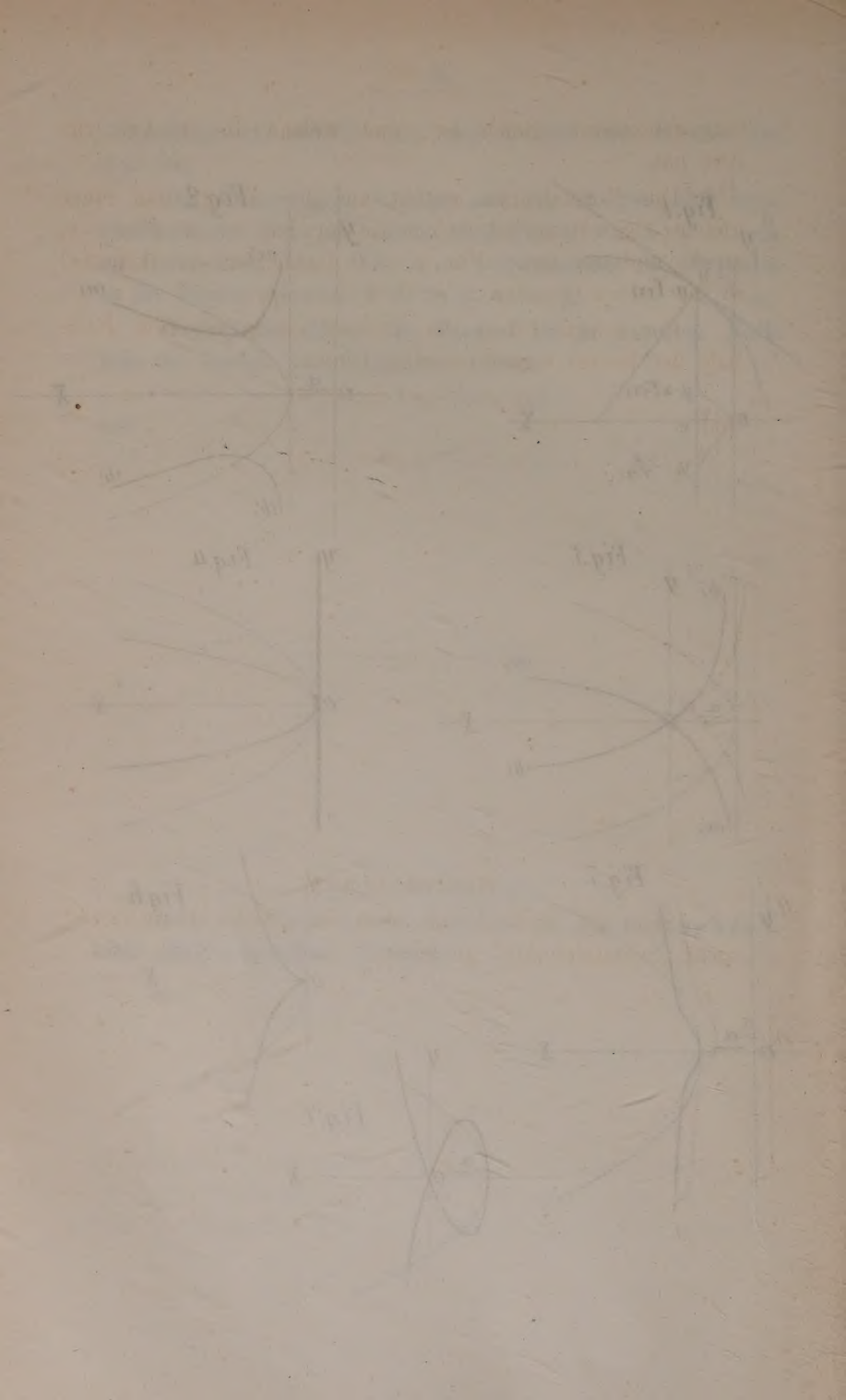
Fig.7.